# 第 3 节 二项分布与超几何分布（★★★）

## 强化训练

1．（★）投篮测试中，已知某同学每次投篮投中的概率为 0.6，且各次投篮是否投中相互独立，则该同学投 3 次，恰好投中 2 次的概率为_____.

**答案**：0.432

**解析**：记 3 次投篮投中的次数为随机变量 $X$，3 次投篮可看成 3 次独立重复试验，成功（投中）概率 $p=0.6$，则 $X\sim B(3,0.6)$，所以 $P(X=2)=\mathrm{C}_3^2\times 0.6^2\times(1-0.6)=0.432$.

2．（2014 • 江西卷 • ★）10 件产品中有 7 件正品，3 件次品，从中任取 4 件，则恰好取到 1 件次品的概率是_____.

**答案**：$\dfrac{1}{2}$

**解析**：从 10 件产品种任取 4 件，有 $\mathrm{C}_{10}^4$ 种取法，若恰好取到 1 件次品，则有 $\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_7^3$ 种取法，

由古典概率计算公式，所求概率 $P=\dfrac{\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_7^3}{\mathrm{C}_{10}^4}=\dfrac{1}{2}$.

3．（★★）某人参加一次考试，共 3 道题，至少答对其中 2 道才能合格，若他答对每道题的概率均为 0.6，则他能合格的概率为_____.

**答案**：0.648



**解析**：答 3 题可看成三次独立试验，答对每题概率相同满足重复性，所以这是独立重复试验，故答对题目的个数服从二项分布，可用其概率分布计算所求概率，

设该人答对的题的个数为随机变量 $X$，则 $X\sim B(3,0.6)$，所以他能合格的概率为

$P(X\ge 2)=P(X=2)+P(X=3)=\mathrm{C}_3^2\times 0.6^2\times(1-0.6)+\mathrm{C}_3^3\times 0.6^3=0.648$.

4．（2022 •江苏模拟 •★★）一个盒子里装有大小相同的 4 个黑球和 3 个白球，从中不放回地取出 3 个球，则白球个数的数学期望是（　　）

（A）$\dfrac{4}{7}$　（B）$\dfrac{9}{7}$　（C）$\dfrac{12}{7}$　（D）$\dfrac{16}{7}$

**答案**：B

**解析**：从装有 7 个球的盒子里取 3 个，取到白球的个数应服从超几何分布，故直接代公式 $E(X)=n\cdot\dfrac{M}{N}$ 求期望，

由题意，超几何分布的三个参数分别为 $n=3$，$N=7$，$M=3$，所以 $E(X)=3\times\dfrac{3}{7}=\dfrac{9}{7}$.

5．（2021 • 天津卷 • ★★）甲、乙两人在每次猜谜活动中各猜一个谜语，若一方猜对且另一方猜错，则猜对的一方获胜，否则本次平局. 已知每次活动中，甲、乙猜对的概率分别为 $\dfrac{5}{6}$ 和 $\dfrac{1}{5}$，且每次活动中甲、乙猜对与否互不影响，各次活动也互不影响，则 1 次活动中，甲获胜的概率为_____；3 次活动中，甲至少获

胜 2 次的概率为_____.

答案：$\dfrac{2}{3}$；$\dfrac{20}{27}$

解析：1 次活动中甲获胜，即甲猜对且乙未猜对，其概率为$\dfrac{5}{6}\times(1-\dfrac{1}{5})=\dfrac{2}{3}$；3 次活动中，甲获胜的次数$X\sim B(3,\dfrac{2}{3})$，

所以甲至少获胜 2 次的概率为$P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)=C_3^2\times(\dfrac{2}{3})^2\times(1-\dfrac{2}{3})+C_3^3\times(\dfrac{2}{3})^3=\dfrac{20}{27}$.

6.（2023·重庆模拟·★★）“锦里开芳宴，兰缸艳早年”，元宵节是中国非常重要的传统节日，某班级准备进行“元宵福气到”抽奖活动，福袋中装有标号分别为 1，2，3，4，5 的五个相同小球，从袋中一次性摸出三个小球，若号码之和是 3 的倍数，则获奖. 若有 5 名同学参与此次活动，则恰好 3 人获奖的概率是（　　）

（A）$\dfrac{72}{625}$　（B）$\dfrac{108}{625}$　（C）$\dfrac{144}{625}$　（D）$\dfrac{216}{625}$

答案：C

解析：5 名同学参与活动可看成 5 重伯努利试验，获奖人数$X\sim B(5,p)$，故先求 $p$，即 1 名同学获奖的概率，

总共五个球，从中取三个，全部的取法有$C_5^3=10$种，要使取到的号码之和为 3 的倍数，则可能的取法有



$\{1,2,3\}$，$\{1,3,5\}$，$\{2,3,4\}$，$\{3,4,5\}$，共 4 种，所以$p=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$，从而$X\sim B(5,\dfrac{2}{5})$，

故恰好 3 人获奖的概率为$P(X=3)=C_5^3\times(\dfrac{2}{5})^3\times(1-\dfrac{2}{5})^2=\dfrac{144}{625}$.

7.（2022·福建福州模拟·★★★）为了保障我国民众的身体健康，某产品在进入市场前必须进行两轮检测，只有两轮检测都合格才能进行销售，否则不能销售. 已知该产品第一轮检测不合格的概率为$\dfrac{1}{9}$，第二轮检测不合格的概率为$\dfrac{1}{10}$，两轮检测是否合格相互之间没有影响，若产品可以销售，则每件产品获利 40 元，若产品不能销售，则每件亏损 80 元，已知一箱中有尚未检测的 4 件产品，记该箱产品总共获利 $X$ 元，则$P(X\geq -80)=$（　　）

（A）$\dfrac{96}{625}$　（B）$\dfrac{256}{625}$　（C）$\dfrac{608}{625}$　（D）$\dfrac{209}{625}$

答案：C

解析：4 件产品中能够销售的件数服从二项分布，先求一件产品可以销售的概率，

由题意，一件产品可以销售的概率为$(1-\dfrac{1}{9})\times(1-\dfrac{1}{10})=\dfrac{4}{5}$，所以该 4 件产品中，可以销售的件数$Y\sim B(4,\dfrac{4}{5})$，

该箱产品的获利 $X$ 与可以销售的件数 $Y$ 有关，找到此关系，即可把$P(X\geq -80)$化为 $Y$ 的取值概率来算，

由题意，$X=40Y-80(4-Y)=120Y-320$，所以$P(X\geq -80)=P(120Y-320\geq -80)=P(Y\geq 2)$

$=1-P(Y=0)-P(Y=1)=1-C_4^0\times(1-\dfrac{4}{5})^4-C_4^1\times\dfrac{4}{5}\times(1-\dfrac{4}{5})^3=\dfrac{608}{625}$.

8.（2019 • 天津卷 • ★★★）设甲、乙两位同学上学期间，每天$7:30$之前到校的概率均为$\dfrac{2}{3}$. 假定甲、乙两位同学到校情况互不影响，且任一同学每天到校情况相互独立.

（1）用$X$表示甲同学上学期间的三天中$7:30$之前到校的天数，求随机变量$X$的分布列和数学期望；

（2）设$M$为事件"上学期间的三天中，甲同学在$7:30$之前到校的天数比乙同学在$7:30$之前到校的天数恰好多 2"，求事件$M$发生的概率.

**解：**（1）（三天可以看成三次独立重复试验，$7:30$前到校的天数即为成功次数，应服从二项分布）

由题意，$X\sim B(3,\dfrac{2}{3})$，所以$P(X=0)=C_3^0\times(1-\dfrac{2}{3})^3=\dfrac{1}{27}$，$P(X=1)=C_3^1\times\dfrac{2}{3}\times(1-\dfrac{2}{3})^2=\dfrac{2}{9}$，

$P(X=2)=C_3^2\times(\dfrac{2}{3})^2\times(1-\dfrac{2}{3})=\dfrac{4}{9}$，$P(X=3)=C_3^3\times(\dfrac{2}{3})^3=\dfrac{8}{27}$，故$X$的分布列为

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\dfrac{1}{27}$ | $\dfrac{2}{9}$ | $\dfrac{4}{9}$ | $\dfrac{8}{27}$ |

因为$X\sim B(3,\dfrac{2}{3})$，所以$E(X)=3\times\dfrac{2}{3}=2$.

（2）设三天中乙在$7:30$之前到校的天数为$Y$，则$Y\sim B(3,\dfrac{2}{3})$，$Y$的概率分布与$X$相同，

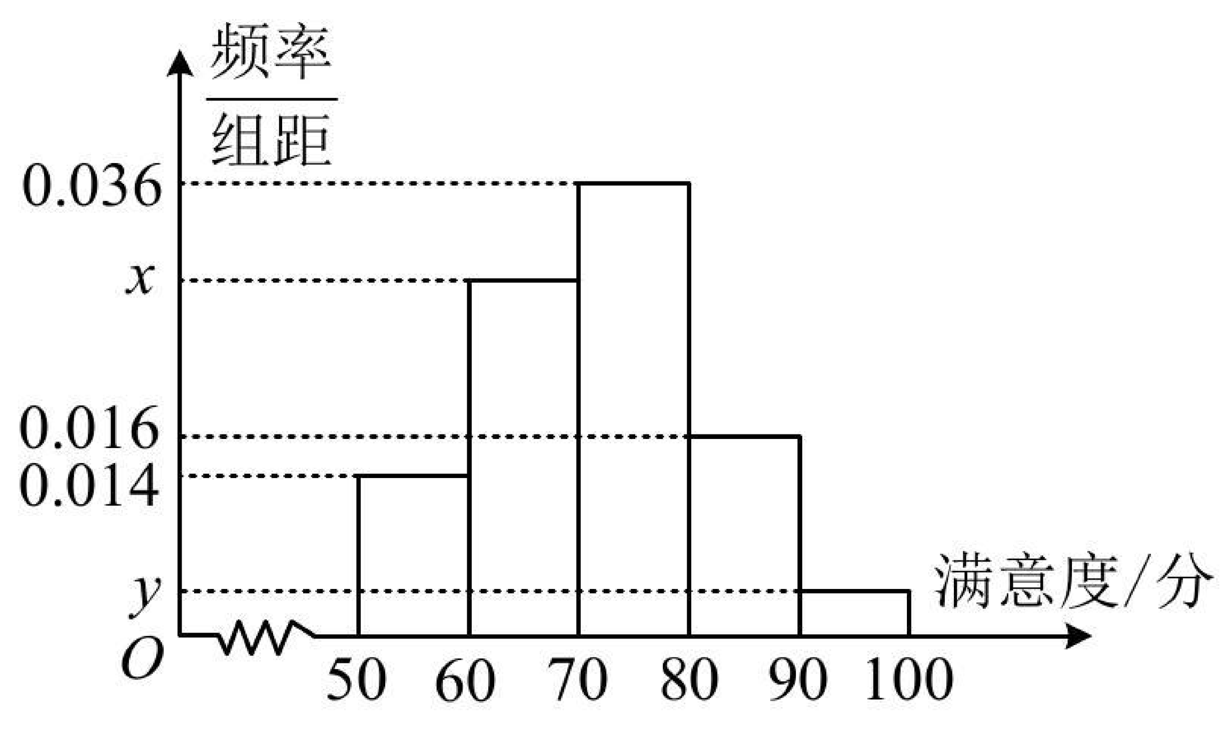


（求概率的事件可分两种情况，三天中$7:30$前到校的天数为：甲 2 天乙 0 天，甲 3 天乙 1 天）

所以$P(M)=P(X=2)\cdot P(Y=0)+P(X=3)\cdot P(Y=1)=\dfrac{4}{9}\times\dfrac{1}{27}+\dfrac{8}{27}\times\dfrac{2}{9}=\dfrac{20}{243}$.

9.（2023 • 四川成都七中模拟 • ★★★）随着人民生活水平的不断提高，"衣食住行"愈发被人们所重视，其中对饮食的要求也越来越高. 某地区为了解当地餐饮情况，随机抽取了 100 人对该地区的餐饮情况进行了问卷调查. 请根据下面尚未完成并有局部污损的频率分布表和频率分布直方图解决下列问题.

| 组别 | 分组 | 频数 | 频率 |
|---|---|---|---|
| 第1组 | $[50,60)$ | 14 | 0.14 |
| 第2组 | $[60,70)$ | $m$ | |
| 第3组 | $[70,80)$ | 36 | 0.36 |
| 第4组 | $[80,90)$ | | 0.16 |
| 第5组 | $[90,100]$ | 4 | $n$ |




（1）求$m$，$n$，$x$，$y$的值；

（2）若将满意度在 80 分以上的人群称为"美食客"，将频率视为概率，用样本估计总体，从该地区中随机抽取 3 人，记其中"美食客"的人数为$\xi$，求$\xi$的分布列和期望.

**解：**（1）（表中给出了$[90,100]$这组的频数，可求频率$n$，进而求得频率分布直方图中的$y$）

由表中数据可知$n=\dfrac{4}{100}=0.04$，所以频率分布直方图中$y=\dfrac{0.04}{10}=0.004$，

（到此只有$[60,70)$这一组的频率不知道了，可用频率和为 1 来求）

$[60,70)$这一组的频率为$1-0.14-0.36-0.16-0.04=0.3$，所以$m=100\times 0.3=30$，$x=\dfrac{0.3}{10}=0.03$.

（2）由题意，样本的 100 人中“美食客”的频率为$0.16+0.04=0.2$，

（由于是从该地区中抽取 3 人，该地区总人数很多，所以看成 3 重伯努利试验，用二项分布处理）

随机变量$\xi\sim B(3,0.2)$，所以$P(\xi=0)=C_3^0\times(1-0.2)^3=0.512$，$P(\xi=1)=C_3^1\times 0.2\times(1-0.2)^2=0.384$，

$P(\xi=2)=C_3^2\times 0.2^2\times(1-0.2)=0.096$，$P(\xi=3)=C_3^3\times 0.2^3=0.008$，所以$\xi$的分布列为：

| $\xi$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $P$ | 0.512 | 0.384 | 0.096 | 0.008 |

因为$\xi\sim B(3,0.2)$，所以$\xi$的期望$E(\xi)=3\times 0.2=0.6$.

10．（2018 • 天津卷（改）• ★★★）已知某单位甲、乙、丙三个部门的员工人数分别为 24，16，16. 现采用按比例分配的分层抽样方法从中抽取 7 人，进行睡眠时间的调查.

（1）应从甲、乙、丙三个部门的员工中分别抽取多少人？

（2）若抽出的 7 人中有 4 人睡眠不足，3 人睡眠充足，现从这 7 人中随机抽取 3 人做进一步的身体检查.

①用$X$表示抽取的 3 人中睡眠不足的员工人数，求随机变量$X$的分布列与数学期望；

②设$A$为事件“抽取的 3 人中，既有睡眠充足的员工，也有睡眠不足的员工”，求事件$A$发生的概率.

**解：**（1）由题意，应从甲、乙、丙三个部门的员工中分别抽取 3 人、2 人、2 人.

（2）①（从 7 人中抽 3 人，抽到睡眠不足的人数应服从超几何分布，按古典概率计算分布列即可）



由题意，$X$可能的取值有 0，1，2，3，且$P(X=0)=\dfrac{C_3^3}{C_7^3}=\dfrac{1}{35}$，$P(X=1)=\dfrac{C_3^2C_4^1}{C_7^3}=\dfrac{12}{35}$，

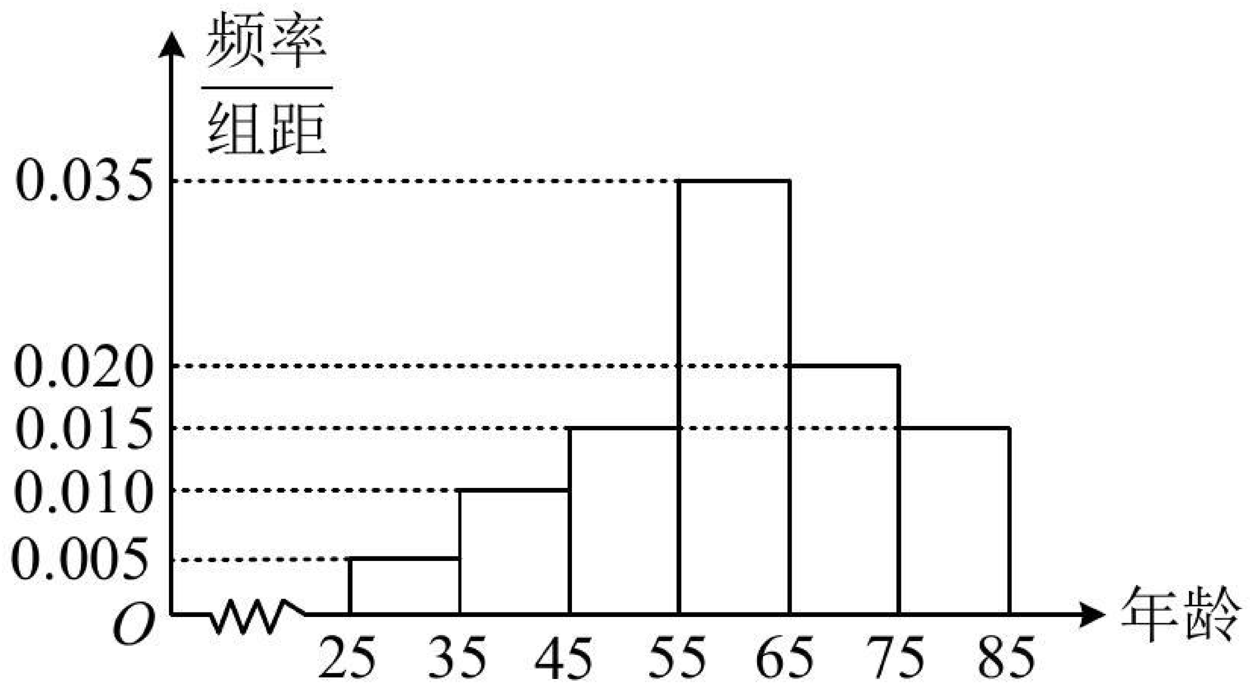
$P(X=2)=\dfrac{C_3^1C_4^2}{C_7^3}=\dfrac{18}{35}$，$P(X=3)=\dfrac{C_4^3}{C_7^3}=\dfrac{4}{35}$，所以$X$的分布列为

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $P$ | $\dfrac{1}{35}$ | $\dfrac{12}{35}$ | $\dfrac{18}{35}$ | $\dfrac{4}{35}$ |

故$E(X)=0\times\dfrac{1}{35}+1\times\dfrac{12}{35}+2\times\dfrac{18}{35}+3\times\dfrac{4}{35}=\dfrac{12}{7}$.

②由①知$P(A)=P(X=1)+P(X=2)=\dfrac{6}{7}$.

11．（2023 • 青海模拟 • ★★★）2021 年国庆期间，某县书画协会在县宣传部门的领导下组织了国庆书画展，参展的 200 幅书画作品反映了该县人民在党的领导下进行国家建设中的艰苦卓绝，这些书画作品的作者的年龄都在$[25,85]$内，根据统计结果，得到如图所示的频率分布直方图：




（1）求这 200 位作者年龄的平均数 $\bar{x}$ 和方差 $s^2$；（同一组数据用该区间的中点值作代表）

（2）县委宣传部从年龄在 $[35,45)$ 和 $[65,75)$ 的作者中，用按比例分配的分层抽样方法抽取 6 人参加县委组织的表彰大会，现要从 6 人中选出 3 人作为代表发言，设这 3 位发言者的年龄落在区间 $[35,45)$ 的人数为 $X$，求 $X$ 的分布列和数学期望.

**解：**（1）由图可知，$\bar{x}=30\times0.05+40\times0.1+50\times0.15+60\times0.35+70\times0.2+80\times0.15=60$，

$s^2=(30-60)^2\times0.05+(40-60)^2\times0.1+(50-60)^2\times0.15+(60-60)^2\times0.35+(70-60)^2\times0.2+(80-60)^2\times0.15=180$.

（2）（先求出样本中 $[35,45)$ 和 $[65,75)$ 这两组的人数，才能找到选出的 6 人的组成情况）

由频率分布直方图可知 $[35,45)$ 这一组有 $200\times0.1=20$ 人，$[65,75)$ 这一组有 $200\times0.2=40$ 人，

所以抽取的 6 人中 $[35,45)$ 有 2 人，$[65,75)$ 有 4 人，

（再从这 6 人中取 3 人，取到 $[35,45)$ 的人数服从超几何分布，可用古典概率求其分布列）



故 $X$ 可能的取值有 0，1，2，且 $P(X=0)=\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，$P(X=1)=\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{5}$，$P(X=2)=\frac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，

所以 $X$ 的分布列为：

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |

故 $X$ 的期望 $E(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}=1$.

【反思】求期望也可直接用超几何分布的期望公式 $E(X)=n\cdot\frac{M}{N}$，本题的期望即为 $E(X)=3\times\frac{2}{6}=1$.

12．（2023•江西模拟•★★★）党的二十大是全党全国各族人民迈上全面建设社会主义现代化国家的新征程、向第二个百年奋斗目标进军的关键时刻召开的一次十分重要的大会，认真学习宣传和全面贯彻落实党的二十大精神，是当前和今后一个时期的首要政治任务和头等大事. 某校计划举行党的二十大知识竞赛，对前来报名者进行初试，初试合格者进入正赛. 初试有备选题 6 道，从备选题中随机挑出 4 道题进行测试，至少答对 3 道题者视为合格. 已知甲、乙两人报名参加初试，在这 6 道题中甲能答对 4 道，乙能答对每道题的概率均为 $\frac{2}{3}$，且甲、乙两人各题是否答对相互独立.

（1）分别求甲、乙两人进入正赛的概率；

（2）记甲、乙两人中进入正赛的人数为 $\xi$，求 $\xi$ 的分布列及 $E(2\xi-1)$.

**解**：（1）甲能进入正赛即选出的 4 道题中，至少有 3 道是会答的，可分两类：答对 3 道，有 $C_4^3C_2^1$ 种，答对 4 道，有 $C_4^4$ 种，总的方法数为 $C_6^4$，故甲能进入正赛的概率 $p_1=\dfrac{C_4^3C_2^1+C_4^4}{C_6^4}=\dfrac{3}{5}$，

（对于乙，答 4 道题可看成 4 重伯努利试验，答对题目的个数应服从二项分布）

设抽出的 4 道题中，乙能正确回答的个数为 $X$，则 $X\sim B(4,\dfrac{2}{3})$，

所以乙能通过测试的概率 $p_2=P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)=C_4^3\times(\dfrac{2}{3})^3\times(1-\dfrac{2}{3})+C_4^4\times(\dfrac{2}{3})^4=\dfrac{16}{27}$.

（2）由题意，$\xi$ 可能的取值为 0，1，2，且 $P(\xi=0)=(1-p_1)(1-p_2)=\dfrac{22}{135}$，

$P(\xi=1)=p_1(1-p_2)+(1-p_1)p_2=\dfrac{13}{27}$，$P(\xi=2)=p_1p_2=\dfrac{16}{45}$，所以 $\xi$ 的分布列为：

| $\xi$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\dfrac{22}{135}$ | $\dfrac{13}{27}$ | $\dfrac{16}{45}$ |

从而 $E(\xi)=0\times\dfrac{22}{135}+1\times\dfrac{13}{27}+2\times\dfrac{16}{45}=\dfrac{161}{135}$，故 $E(2\xi-1)=2E(\xi)-1=\dfrac{187}{135}$.